

Addition von Brüchen

M1: Brüche lassen sich nur addieren, wenn sie **denselben Nenner** haben!

M2: Um Brüche auf einen gemeinsamen Nenner (Hauptnenner) zu bringen, sucht man das kleinste gemeinsame Vielfache (**k.g.V.**) aller Nenner!

Beispiel 1

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{4}$$

Das k.g.V. ist 12 (=3·4),

denn 12 ist die kleinste Zahl, die man durch 3 und 4 ohne Rest teilen kann!

M3: Um bei schwierigen Verhältnissen das k.g.V. zu finden, zerlegt man die Nenner in ihre **Primfaktoren** und ordnet diese!
(Primzahlen lassen sich nur durch 1 und sich selbst teilen)

Beispiel 2

$$\frac{1}{8} + \frac{3}{4} + \frac{7}{9} + \frac{8}{11} + \frac{4}{3}$$

Nenner zerlegen (und ordnen)*:

$$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$$

$$4 = 2 \cdot 2$$

$$9 = 3 \cdot 3$$

$$11 = 11$$

$$3 = 3$$

2·2·2·3·3·11 ist das k.g.V., also 792

*Es ist wichtig, dass **nur gleiche Ziffern untereinander** geschrieben werden. Erscheint eine **neue Ziffer** als Primzahl in einer Zahl, so bekommt sie eine **neue Spalte**.

Beispiel 3

Bei den Brüchen

$$\frac{1}{3} + \frac{3}{4} + \frac{5}{8}$$

erhält man durch einfache Multiplikation der Nenner ein gemeinsames Vielfaches:

$$3 \cdot 4 \cdot 8 = 96;$$

aber ist 96 auch der richtige Hauptnenner, also das **kleinste** gemeinsame Vielfache (k.g.V.)?

Dazu zerlege ich wieder in die Primfaktoren:

$$3 = 3$$

$$4 = 2 \cdot 2$$

$$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$$

$$3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 24 \quad \text{Dies ist der Hauptnenner!}$$

Auch mit dem großen Nenner hätte man (nach dem Kürzen des Ergebnisses) das gewünschte richtige Ergebnis bekommen; allerdings mit größerem Rechenaufwand und dadurch zahlreichen Fehlerquellen!

Aufgabenblock 1

Suchen (berechnen) Sie den Hauptnenner: (Aufgaben jetzt noch nicht ausrechnen!)

$$\text{a) } \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{3}{10} + \frac{2}{9} + \frac{4}{6}$$

$$\text{b) } \frac{5}{2} + \frac{4}{3} + \frac{8}{9} + \frac{1}{8} + \frac{3}{12}$$

$$\text{c) } \frac{4}{3} + \frac{5}{2} + \frac{7}{8} + \frac{8}{4} + \frac{3}{13}$$

$$\text{d) } \frac{2}{3} + \frac{5}{11} + \frac{1}{5} + \frac{9}{7} + \frac{4}{22}$$

Wie gehe ich nun nach der Ermittlung des k.g.V. vor, um die Brüche **auf den Hauptnenner** zu bringen?

Beispiel 4

Für die Aufgabe

$$\frac{1}{3} + \frac{3}{4} + \frac{5}{8}$$

haben wir den Hauptnenner mit der Zahl "24" ermittelt.

Jetzt multiplizieren wir **in jedem einzelnen Bruch** Zähler und Nenner mit der Zahl, die man aus der Rechnung $\frac{\text{Hauptnenner}}{\text{Nenner}}$ erhält (d.h., man erweitert jeden Bruch um den Faktor, der aus dem aktuellen Nenner den Hauptnenner macht):

$$\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{\text{Hauptnenner}}{\text{Nenner}} = \frac{24}{3} = 8$$

$$\frac{3}{4} \Rightarrow \frac{\text{Hauptnenner}}{\text{Nenner}} = \frac{24}{4} = 6$$

$$\frac{5}{8} \Rightarrow \frac{\text{Hauptnenner}}{\text{Nenner}} = \frac{24}{8} = 3$$

Die Rechnung mit den Faktoren sieht jetzt wie folgt aus:

$$\frac{1 \cdot 8}{3 \cdot 8} + \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 6} + \frac{5 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{8}{24} + \frac{18}{24} + \frac{15}{24}$$

M4: Brüche mit gleichem Nenner kann man nun auf einen gemeinsamen Bruchstrich schreiben. Man addiert sie, indem man die Zähler addiert und den Nenner beibehält!

$$\Rightarrow \frac{8}{24} + \frac{18}{24} + \frac{15}{24} = \frac{8+18+15}{24} = \frac{41}{24}$$

Zusammenfassung der bisherigen Schritte:

Aufgabe:

$$\frac{1}{3} + \frac{3}{4} + \frac{5}{8}$$

Erster Schritt:

Hauptnenner suchen (meist durch Primfaktorzerlegung):

$$\begin{aligned} 3 &= 3 \\ 4 &= 2 \cdot 2 \\ 8 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \end{aligned}$$

$$3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = \underline{\underline{24}}$$

Zweiter Schritt:

Die Summanden jeweils zum Hauptnenner erweitern:

$$\frac{1 \cdot 8}{3 \cdot 8} + \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 6} + \frac{5 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{8}{24} + \frac{18}{24} + \frac{15}{24}$$

Dritter Schritt:

Addition der Zähler und, wenn möglich Kürzen:

$$\Rightarrow \frac{8}{24} + \frac{18}{24} + \frac{15}{24} = \frac{8+18+15}{24} = \frac{41}{24}$$

Bitte berechnen Sie jetzt den Aufgabenblock 1!

Kürzen Sie dabei so früh wie möglich, um mit kleinen Zahlen zu arbeiten und beachten Sie die wichtige Regel:

M5: In Differenzen und Summen darf nicht gekürzt werden! (Nur in Quotienten mit Produkten)

Subtraktion von Brüchen

Die Vorgehensweise ist genauso wie bei der Addition. Auch hier lassen sich nur Brüche mit demselben Nenner subtrahieren:

Beispiel 5

$$\frac{16}{5} - \frac{7}{8} - \frac{3}{4}$$

1. Schritt

$$5 = 5$$

$$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$$

$$4 = 2 \cdot 2$$

$$5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 40 \text{ (=kgV = Hauptnenner)}$$

2. Schritt

$$\frac{16 \cdot 8}{5 \cdot 8} - \frac{7 \cdot 5}{8 \cdot 5} - \frac{3 \cdot 10}{4 \cdot 10} = \frac{128}{40} - \frac{35}{40} - \frac{30}{40}$$

3. Schritt

$$\frac{128 - 35 - 30}{40} = \frac{63}{40}$$

Aufgabenblock 2

a) $\frac{13}{8} - \frac{5}{6} - \frac{4}{7} - \frac{3}{4}$

b) $\frac{100}{99} - \frac{7}{9} - \frac{3}{6} - \frac{2}{3}$

c) $\frac{28}{12} - \frac{5}{6} - \frac{2}{3} - \frac{1}{2}$

d) $\frac{4}{5} + \frac{7}{6} - \frac{3}{4} + \frac{1}{2}$

Multiplikation von Brüchen

M6: Brüche multipliziert man, indem man Zähler und Nenner getrennt multipliziert!

Beispiel 6

$$\frac{6}{8} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{4}{2} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 4}{8 \cdot 9 \cdot 2} = \frac{168}{144}$$

aber nicht das Kürzen vergessen; also:

$$\frac{\overset{3}{\cancel{6}} \cdot \overset{2}{\cancel{4}} \cdot \overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{4}{\cancel{8}} \cdot \underset{1}{\cancel{2}} \cdot \underset{1}{\cancel{2}}} = \frac{3 \cdot 7 \cdot 2}{4 \cdot 9} = \frac{\overset{7}{\cancel{42}}}{\underset{6}{\cancel{36}}} = \frac{7}{6}$$

Beispiel 7

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{12}{16} \cdot \frac{4}{2} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 2}{4 \cdot 4 \cdot 1} = \frac{18}{16} = \frac{9}{8}$$

Aufgabenblock 3

a) $\frac{4}{5} \cdot \frac{10}{12} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{5}{2} =$

b) $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{7} =$

c) $\frac{4}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{9}{9} \cdot \frac{12}{11} =$

d) $\frac{7}{4} \cdot \frac{6}{3} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2} =$

Division von Brüchen

M7: Brüche dividiert man, indem man mit dem Kehrwert multipliziert!

Beispiel 8

$$\frac{3}{4} : \frac{4}{2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 4} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

a) $\frac{3}{5} : \frac{4}{7} =$

b) $\frac{6}{7} : \frac{3}{2} =$

M8: Bei mehreren Divisionen hintereinander nimmt man nach der zweiten Zahl immer den Kehrwert!

Beispiel 9

$$\frac{3}{2} : \frac{4}{5} : \frac{6}{8} = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{8}{6}$$

Aufgabenblock 5

a) $\frac{7}{6} : \frac{8}{5} : \frac{2}{3} =$

b) $\frac{9}{10} : \frac{4}{5} : \frac{9}{8} : \frac{1}{5} =$

Gemischte Aufgaben

M9: Bei gemischten Aufgaben ist immer die Regel "Punktrechnung vor Strichrechnung" zu beachten!

d.h.

„ \cdot “ und „ $:$ “ werden vor „ $+$ “ und „ $-$ “ ausgerechnet.

Beispiel 10

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{7} + \frac{6}{8} : \frac{4}{3} = \left(\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{7} \right) + \left(\frac{6}{8} : \frac{4}{3} \right) = \frac{12}{35} + \left(\frac{6 \cdot 3}{8 \cdot 4} \right) = \frac{12}{35} + \frac{18}{32} = \frac{12}{35} + \frac{9}{16} = \frac{192}{560} + \frac{315}{560} = \frac{507}{560}$$

Aufgabenblock 6

a) $\frac{9}{12} + \frac{7}{11} - \frac{13}{8} \cdot \frac{12}{5} =$

b) $\frac{1}{3} : \frac{2}{5} - \frac{8}{4} =$

c) $\frac{4}{6} \cdot \frac{6}{7} + \frac{8}{9} : \frac{7}{6} - \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} =$

d) $\frac{9}{8} - \frac{4}{7} + \frac{8}{4} \cdot \frac{6}{5} : \frac{3}{6} =$